



TUGAS AKHIR - SM141501

**PENYELESAIAN MODEL FORWARD
RESISTIVITAS ARUS SEARAH DENGAN
MENGUNAKAN METODE ELEMEN HINGGA
DAN GRADIEN KONJUGASI**

SATRIA STANZA PRAMAYOGA
NRP 12081000050

Dosen Pembimbing:
Prof. Dr. Erna Apriliani, M.Si
Drs. Kamiran, M.Si

JURUSAN MATEMATIKA
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya 2016



FINAL PROJECT - SM141501

**SOLUTION OF DC RESISTIVITY FORWARD
MODEL USING FINITE ELEMENT AND
CONJUGATE GRADIENT METHOD**

SATRIA STANZA PRAMAYOGA
NRP 12081000050

Supervisors:

Prof. Dr. Erna Apriliani, M.Si

Drs. Kamiran, M.Si

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
Faculty of Mathematics and Natural Sciences
Sepuluh Nopember Institute of Technology
Surabaya 2016

LEMBAR PENGESAHAN
PENYELESAIAN MODEL FORWARD
RESISTIVITAS ARUS SEARAH DENGAN
MENGUNAKAN METODE ELEMEN
HINGGA DAN GRADIEN KONJUGASI
SOLUTION OF DC RESISTIVITY
FORWARD MODEL USING FINITE
ELEMENT AND CONJUGATE GRADIENT
METHOD

Diajukan Untuk Memenuhi Salah Satu Syarat
Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains
pada

Bidang Studi Pemodelan dan Simulasi Sistem
Program Studi S-1 Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya

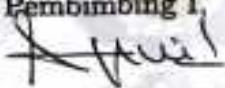
Oleh:

SATRIA STANZA PRAMAYOGA
NRP. 12081000050

Menyetujui,
Dosen Pembimbing II,

Dosen Pembimbing I,


Drs. Kamiran, M.Si
NIP. 19630623 198903 1 001


Prof. Dr. Erna Aprilliani, M.Si
NIP. 19660414 199102 2 001

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika
FMIPA ITS


Dr. Inggan Mukhlash, S.Si, MT
NIP. 19700831 199403 1 003
Surabaya, 29 Juli 2018

PENYELESAIAN MODEL FORWARD RESISTIVITAS ARUS SEARAH DENGAN MENGUNAKAN METODE ELEMEN HINGGA DAN GRADIEN KONJUGASI

Nama Mahasiswa : Satria Stanza Pramayoga
NRP : 12081000050
Jurusan : Matematika FMIPA-ITS
Pembimbing : 1. Prof. Dr. Erna Apriliani, M.Si
2. Drs. Kamiran, M.Si

Abstrak

Pengukuran resistivitas menggunakan arus listrik searah merupakan salah satu metode untuk mendapatkan informasi mengenai material yang ada di bawah permukaan bumi. Resistivitas, selain diukur, juga bisa dihitung menggunakan persamaan yang menyatakan hubungan antara beda potensial dan besarnya arus. Penggabungan hasil pengukuran dan perhitungan menimbulkan satu permasalahan yang disebut invers problem. Permasalahan invers bersifat ill-posed, karena itu diperlukan metode khusus untuk mendapatkan solusi yang tunggal dan smooth. Forward problem timbul dari proses penyelesaian invers problem, yaitu permasalahan mendapatkan beda potensial jika besar arus dan resistivitasnya diketahui. Forward problem pengukuran resistivitas menyatakan kaitan antara beda potensial, besar arus, dan resistivitas melalui persamaan yang berdasar pada hukum Ohm. Untuk bisa digunakan, forward problem dibentuk dalam formulasi lemah dan didiskritkan. Dalam Tugas Akhir ini, forward problem didiskritisasi dilakukan dengan menggunakan metode elemen hingga. Setelah menjadi bentuk diskrit, permasalahan berubah menjadi menyelesaikan sistem persamaan linear. Metode gradien konjugasi digunakan untuk mendapatkan

invers matrik dalam sistem persamaan linear tersebut.

Kata-kunci: *Permasalahan Forward, Permasalahan Invers, Metode Elemen Hingga, Metode Konjugasi Gradien*

SOLUTION OF DC RESISTIVITY FORWARD MODEL USING FINITE ELEMENT AND CONJUGATE GRADIENT METHOD

Name : Satria Stanza Pramayoga
NRP : 12081000050
Department : Mathematics FMIPA-ITS
Supervisors : 1. Prof. Dr. Erna Apriliani, M.Si
2. Drs. Kamiran, M.Si

Abstract

Resistivity measurements using direct current is one method to obtain information about existing material beneath the earth's surface. Resistivity can also be calculated using an equation expressing the relation between the potential difference and current. Merging the results of measurements and calculations lead to a problem called inverse problem. Inverse problems are ill-posed. It required a special method to obtain a single and smooth solution. Forward problem arising from the settlement process inverse problem, namely the problem of getting potential difference if the value of current and resistivity are known. Forward problem resistivity measurements stated links between potential difference, current, and resistivity by an equation which is based on Ohm's law. To be used, forward problem is formed in the weak formulation and discretized. In this final project, forward problem is discretized using the finite element method. After becoming a discrete form, the problem turns into solving systems of linear equations. Conjugate gradient method is used to get the inverse matrix in that system of linear equations.

Keywords: *Forward Problem, Invers Problem, Finite Element Method, Conjugate Gradient Method*

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
LEMBAR PENGESAHAN	v
ABSTRAK	vii
ABSTRACT	ix
KATA PENGANTAR	xi
DAFTAR ISI	xiii
DAFTAR GAMBAR	xv
DAFTAR SIMBOL	xvii
BAB I PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	3
1.3 Batasan Masalah	3
1.4 Tujuan	3
1.5 Manfaat	3
1.6 Sistematika Penulisan	4
BAB II TINJAUAN PUSTAKA	5
2.1 Pengukuran Resistivitas Arus Searah	5
2.2 Formulasi Forward Model	8
2.3 Metode Elemen Hingga	9
2.4 Metode Konjugasi Gradien	14
BAB III METODE PENELITIAN	17
3.1 Studi Literatur	17
3.2 Penjabaran Forward Problem	17

BAB IV	ANALISIS DAN PEMBAHASAN	19
4.1	Perumusan Forward Problem	19
4.2	Penggabaran dan Diskritisasi Blok Model . . .	27
4.3	Perhitungan Matriks Kekakuan	29
4.4	Persamaan Forward Problem dan Penyelesaiannya	43
BAB V	PENUTUP	45
5.1	Kesimpulan	45
5.2	Saran	45
DAFTAR PUSTAKA		47

DAFTAR GAMBAR

Gambar 4.1	Domain dari forward model.	20
Gambar 4.2	<i>Pseudosection</i> untuk Konfigurasi Wenner	27
Gambar 4.3	Diskritisasi Domain	28
Gambar 4.4	Segmen pada batas $\partial\Omega_{D1}$ beserta sudut φ	34
Gambar 4.5	Segmen pada batas $\partial\Omega_{D1}$ beserta jaraknya dengan sumber arus.	35
Gambar 4.6	Segmen pada batas $\partial\Omega_{D2}$ beserta sudut φ	38
Gambar 4.7	Segmen pada batas $\partial\Omega_{D2}$ beserta jaraknya dengan sumber arus.	39
Gambar 4.8	Segmen pada batas $\partial\Omega_{C1}$ beserta sudut φ	41
Gambar 4.9	Segmen pada batas $\partial\Omega_{C1}$ beserta jaraknya dengan sumber arus.	42

Daftar Simbol

Ω	Suatu himpunan bagian dari \mathbb{R}^d yang terbuka.
$\partial\Omega$	Batas dari himpunan Ω .
$\overline{\Omega}$	Tutupan dari himpunan Ω .
$C^m(\Omega)$	Himpunan semua fungsi kontinu di domain Ω yang turunannya ke- k , $k = 1, 2, \dots, m$ juga kontinu di domain Ω .
$C^\infty(\Omega)$	Himpunan semua fungsi $v \in C(\Omega)$ sedemikian sehingga $v \in C^m(\Omega)$, untuk setiap $m \in \mathbb{Z}^+$.
$C_0^\infty(\Omega)$	Himpunan semua fungsi $v \in C^\infty(\Omega)$ yang himpunan supportnya merupakan himpunan bagian sejati dari Ω .
$L^p(\Omega)$	Himpunan semua fungsi measurable $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ sedemikian sehingga $\ v\ _{L^p(\Omega)} = \left[\int_{\Omega} v_p(x) ^p dx \right]^{\frac{1}{p}} < \infty$.
$H^k(\Omega)$	Sama dengan $W^{k,2}(\Omega)$, yaitu himpunan semua fungsi $v \in L^p(\Omega)$ sedemikian sehingga untuk setiap multi indeks α dengan $ \alpha \leq k$, derivatif lemah $\partial^\alpha v$ ada dan $\partial^\alpha v \in L^p(\Omega)$.
$H_0^k(\Omega)$	Sama dengan $W_0^{k,2}(\Omega)$, yaitu tutupan dari $C_0^\infty(\Omega)$ di $W^{k,2}(\Omega)$.
∇	Operator turunan yaitu $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$.
δ	Fungsi delta Dirac.
Δ	Operator Laplace yaitu $\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$.

BAB I

PENDAHULUAN

Pada bab ini akan diuraikan hal-hal yang melatarbelakangi tugas akhir ini yang selanjutnya dituliskan dalam sub perumusan masalah. Dalam bab ini juga dicantumkan mengenai batasan masalah, tujuan dan manfaat dari tugas akhir ini. Adapun sistematika penulisan tugas akhir diuraikan pada bagian akhir bab ini.

1.1 Latar Belakang

Pengukuran resistivitas menggunakan arus listrik searah merupakan salah satu metode untuk mendapatkan informasi mengenai bahan maupun batuan yang ada di bawah permukaan bumi. Pengukuran dilakukan dengan cara mengalirkan arus listrik searah melalui suatu elektroda yang ditancapkan pada permukaan bumi. Selanjutnya, pada elektroda yang lain, dilakukan pengukuran beda potensial. Berdasarkan besar arus listrik dan beda potensial hasil pengukuran inilah diperoleh informasi mengenai resistivitas titik-titik di bawah permukaan bumi. Resistivitas dihitung berdasarkan persamaan yang menyatakan hubungan antara beda potensial, kerapatan arus listrik, besarnya medan listrik, serta konduktivitas material[1].

Secara analitis, permasalahan resistivitas arus searah menyatakan hubungan antara resistivitas bahan, arus yang dialirkan, serta beda potensial yang diukur. Hubungan tersebut dinyatakan dalam persamaan resistivitas. Jika suatu bahan dengan resistivitas tertentu dialiri arus listrik, maka beda potensial antara dua titik pada bahan tersebut dapat dihitung melalui persamaan resistivitas. Permasalahan mendapatkan beda potensial jika diketahui nilai resistivitas dan besar arus melalui persamaan resistivitas disebut dengan

forward problem. Pada kasus yang lebih kompleks, bahan yang diukur dapat memiliki nilai resistivitas yang berbeda di setiap titiknya.

Berbeda dengan *forward problem*, *invers problem* dari persamaan resistivitas dapat dilihat sebagai permasalahan mencari resistivitas jika diketahui data besar arus dan beda potensial. Pada *forward problem* keberadaan, ketunggalan maupun kestabilan solusinya dapat diasumsikan, tetapi pada *invers problem* ketiganya tidak dijamin[2].

Untuk mendapatkan solusi dari *forward problem*, persamaan resistivitas diubah terlebih dahulu ke dalam formulasi lemahnya(*weak formulation*). Selanjutnya untuk menyelesaikan formulasi lemah, dapat digunakan diskritisasi domain menggunakan metode elemen hingga[3]. Sedangkan untuk mendapatkan solusi dari *invers problem* yang dijamin ketunggalan dan kestabilannya, salah satu metode yang dapat digunakan adalah dengan menggunakan regularisasi[1]. Regularisasi dilakukan dengan membandingkan hasil perhitungan melalui *forward problem* dengan hasil pengukuran. Tujuannya secara umum mengkompromikan hasil perhitungan dengan hasil pengukuran sehingga didapat parameter model, dalam hal ini nilai resistivitas, yang paling sesuai dengan kondisi daerah yang diukur resistivitasnya. Untuk menyelesaikan *inverse problem* dapat digunakan metode Gauss-Newton dengan diskritisasinya menggunakan metode elemen hingga.

Bentuk diskrit dari masing-masing permasalahan, baik *invers problem* maupun *forward problem* melibatkan pencarian invers matriks. Invers matriks dapat dicari menggunakan berbagai metode. Salah satu metode yang digunakan adalah metode konjugasi gradien[1]. Selain itu telah dibahas pula berbagai modifikasi dari metode konjugasi gradien[4].

Tugas Akhir ini membahas tentang penyelesaian permasalahan forward pengukuran resistivitas arus searah dengan diskritisasi menggunakan metode elemen hingga serta penyelesaian bentuk diskritnya menggunakan metode konjugasi gradien.

1.2 Rumusan Masalah

Permasalahan yang dibahas dalam tugas akhir ini antara lain:

- a. Merumuskan *forward problem* dari resistivitas arus searah menggunakan metode elemen hingga.
- b. Menyelesaikan *forward problem* resistivitas arus searah menggunakan metode gradien konjugasi.

1.3 Batasan Masalah

Dalam tugas akhir ini, permasalahan yang dibahas dibatasi pada ruang lingkup antara lain:

- a. Penyelesaian metode resistivitas terbatas hanya pada permasalahan forwardnya, belum menyelesaikan permasalahan inversnya.
- b. Diskritisasi forward model menggunakan formulasi lemah hanya pada ruang berdimensi dua.

1.4 Tujuan

Tujuan dari tugas akhir ini adalah untuk mengetahui kegunaan metode elemen hingga dan metode konjugasi gradien dalam menyelesaikan persamaan resistivitas.

1.5 Manfaat

Tugas akhir ini memiliki manfaat antara lain:

- a. Untuk mengetahui langkah formal dalam pembentukan metode iterasi, serta penerapannya.

- b. Sebagai salah satu rujukan dalam bidang geofisika untuk menyelesaikan persamaan yang berkaitan dengan *forward problem*.

1.6 Sistematika Penulisan

Penulisan tugas akhir ini disusun dalam lima bab, yaitu:

1. BAB I PENDAHULUAN

Bab ini berisi tentang gambaran umum dari penulisan tugas akhir yang meliputi latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan, manfaat, dan sistematika penulisan.

2. BAB II TINJAUAN PUSTAKA

Bab ini berisi tentang teori dasar mengenai persamaan pengukuran resistivitas dan pembentukan *forward problem*. Selain itu dibahas pula mengenai metode elemen hingga dengan diskritisasi segitiga dan metode konjugasi gradien.

3. BAB III METODE PENELITIAN

Pada bab ini dibahas metode yang digunakan dan tahapan-tahapan yang dilakukan dalam pengerjaan Tugas Akhir.

4. BAB IV PEMBAHASAN

Pada bab ini dibahas mengenai penyelesaian *forward problem* menggunakan metode elemen hingga dan metode konjugasi gradien.

5. BAB V PENUTUP

Bab ini berisi kesimpulan tugas akhir yang diperoleh dari bab pembahasan dan saran untuk pengembangan lebih lanjut dari Tugas Akhir.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini, dibahas mengenai teori yang menunjang dalam pengerjaan Tugas Akhir. Bahasan dalam bab ini meliputi penjelasan mengenai pengukuran resistivitas menggunakan arus searah, teori penunjang untuk pembentukan forward model, serta penyelesaiannya. Untuk pembentukan forward model, dibahas mengenai formulasi lemah dan metode elemen hingga. Sedangkan untuk penyelesaian forward model dibahas mengenai metode gradien konjugasi.

2.1 Pengukuran Resistivitas Arus Searah

Pengukuran resistivitas merupakan pengukuran yang melibatkan bagian dari dalam bumi. Setiap bagian dari bumi dapat dimisalkan sebagai sebuah medan listrik E . Selain itu dapat didefinisikan pula fungsi U yang memetakan medan listrik tersebut ke himpunan bilangan riil. Fungsi tersebut didefinisikan sebagai besar potensial pada setiap titik pada medan. Jika r adalah sebuah titik di medan listrik, maka besar potensial pada titik tersebut dapat dinyatakan dalam $U(r)$. Selanjutnya jika berpindah sejauh dr maka besar potensial berubah sebesar dU yang setara dengan kerja yang dilakukan yaitu $-E dr$. Dapat dituliskan $E = -\frac{dU}{dr}$. Persamaan $E = -\frac{dU}{dr}$ pada dimensi yang lebih tinggi dapat dinyatakan dalam gradient dari besar potensial listrik yaitu $E = -\nabla U$. Jika V menyatakan beda potensial antara titik dengan posisi r dan $r + dr$, dan L menyatakan jarak antara kedua titik tersebut, maka $E = \frac{V}{L}$.

Pada sebuah kabel konduktor, hubungan antara besarnya arus yang mengalir (I), resistansi (R), dan beda potensial antara

dua ujung kabel dinyatakan dalam $V = IR$. Beda potensial V memiliki satuan volt, besar arus I memiliki satuan ampere, dan resistansi memiliki satuan ohm. Kebalikan dari resistansi adalah konduktansi yang memiliki satuan atau biasa disebut siemens.

Berdasarkan eksperimen fisika, nilai resistansi kabel konduktor berbanding lurus dengan panjang kabel(L) dan berbanding terbalik dengan luas penampang kabel(A). Formulasinya dapat dituliskan dalam persamaan $R = \rho \frac{L}{A}$. Setiap bahan dari kabel, nilai ρ relatif konstan. karenanya dapat disimpulkan bahwa konstanta ρ berarti menyatakan resistivitas bahan dari kabel tersebut. Satuan dari ρ adalah ohm-meter. Kebalikan dari resistivitas adalah konduktivitas(σ), yang satuannya adalah siemens per meter.

Dari kedua persamaan $V = IR$ dan $R = \rho \frac{L}{A}$ diperoleh persamaan $\frac{V}{L} = \rho \frac{I}{A}$. Ruas kiri persamaan nilainya sama dengan E , besar medan listrik. Sedangkan $\frac{I}{A}$ menyatakan arus per satuan luas atau dalam bahasa yang berbeda merupakan kerapatan arus(J). Karena itu $\frac{V}{L} = \rho \frac{I}{A} \iff E = \rho J$ ekuivalen dengan $J = \sigma E$. Persamaan terakhir ini disebut dengan hukum Ohm[5].

Berdasarkan relasi $J = \sigma E$ maka

$$\begin{aligned}\nabla J &= \nabla \sigma E \\ &= -\nabla \cdot (\sigma \nabla U)\end{aligned}$$

Pada suatu daerah berdimensi tiga, berdasarkan hukum kekekalan muatan listrik maka perubahan rapat muatan(T) di suatu titik dengan koordinat $\mathbf{r} = (x, y, z)$ setiap satuan waktu dirumuskan dengan

$$\nabla J = \frac{\partial T}{\partial t} \delta(\mathbf{r}) \quad (2.1)$$

Notasi δ menyatakan fungsi delta Dirac pada ruang berdimensi tiga. Saat dialiri arus dari titik dengan koordinat

$\mathbf{r}_S = (x_S, y_S, z_S)$ persamaan (2.1) dapat dituliskan menjadi

$$-\nabla \cdot (\sigma \nabla U) |_{\mathbf{r}} = \frac{\partial T}{\partial t} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_S) \quad (2.2)$$

Karena perubahan rapat muatan tiap satuan waktu sama dengan rapat arus maka

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{I}{\Delta H}$$

Jika ΔH sama dengan 1 satuan maka persamaan (2.2) dapat dinyatakan dalam

$$-\nabla \cdot (\sigma \nabla U) |_{\mathbf{r}} = I \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_S) \quad (2.3)$$

Persamaan (2.3) menjadi acuan dalam pengukuran resistivitas menggunakan arus searah.

Adapun syarat batas untuk persamaan (2.3) yaitu:

1. Pada batas antara permukaan tanah dengan udara berlaku persamaan

$$\frac{\partial U}{\partial \mathbf{n}} = 0$$

dengan \mathbf{n} menyatakan vektor normal terhadap permukaan tanah.

2. Pada batas dalam tanah yang membatasi daerah pengamatan dengan daerah lainnya di dalam bumi, digunakan persamaan

$$\frac{\partial U}{\partial \mathbf{n}} + \beta U = 0$$

Secara umum syarat batas dari persamaan ini dapat dituliskan dalam persamaan

$$\alpha \frac{\partial U}{\partial \mathbf{n}} + \beta U = \gamma$$

dengan α , β , dan γ merupakan suatu fungsi dengan domain sesuai domain $U[1]$.

2.2 Formulasi Forward Model

Penyelesaian persamaan diferensial parsial dengan syarat batas tertentu dapat didekati dengan menggunakan konsep formulasi lemah (*weak formulation*). Untuk menjelaskan konsep formulasi lemah digunakan contoh berupa model

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \text{di } \Omega \\ u = 0, & \text{di } \partial\Omega = \Gamma \end{cases}$$

Persamaan diferensial parsial pada model ini disebut dengan persamaan Poisson. Persoalannya adalah mencari fungsi u di domain Ω yang memenuhi model jika diketahui nilai fungsi f . Fungsi yang dicari adalah yang memenuhi sifat *smooth* (halus). Fungsi yang halus merupakan fungsi yang memiliki sifat dapat didiferensialkan sebanyak tak berhingga kali.

Terkadang suatu model tidak memiliki solusi yang halus, karena itu diperkenalkan konsep solusi klasik dan solusi lemah. Solusi klasik dari model ini adalah fungsi $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$. Himpunan $C^2(\Omega)$ menyatakan himpunan fungsi dengan domain Ω yang turunan keduanya kontinu. Sedangkan $C(\bar{\Omega})$ merupakan himpunan fungsi yang kontinu di domainnya yakni $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$.

Solusi lemah didapat dari konsep solusi klasik. Diasumsikan model memiliki solusi klasik. Untuk suatu fungsi $v \in C_0^\infty(\Omega)$ yang tetap, jika model dikalikan dengan v kemudian diintegrasikan terhadap Ω maka diperoleh

$$-\int_{\Omega} v \Delta u \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} v f \, d\mathbf{x}$$

Menggunakan integrasi parsial dan dengan memasukkan syarat batas $u = 0$ diperoleh

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} v f \, d\mathbf{x}$$

Untuk $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ persamaan ini berlaku. Meski demikian sebenarnya cukup dengan syarat bahwa $u, v \in H^1(\Omega)$ dan $f \in L^2(\Omega)$. Karena itu diperoleh formulasi lemah dari model adalah mencari $u \in H_0^1(\Omega)$ sedemikian sehingga

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v d\mathbf{x} = \int_{\Omega} v f d\mathbf{x}, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

Selanjutnya jika dimisalkan $V = H_0^1(\Omega)$ dan a suatu pemetaan yang memetakan $V \times V$ ke \mathbb{R} dengan definisi

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v d\mathbf{x}$$

Kemudian dimisalkan pula ℓ fungsional linear yang memetakan V ke \mathbb{R} dengan definisi

$$\ell(v) = \int_{\Omega} v f d\mathbf{x}$$

Formulasi lemah dapat ditulis sebagai mencari $u \in V$ sedemikian sehingga $a(u, v) = \ell(v)$ untuk setiap $v \in V$. Formulasi lemah inilah yang diselesaikan secara numerik menggunakan metode elemen hingga[6].

2.3 Metode Elemen Hingga

Metode elemen hingga merupakan kasus khusus dari metode Galerkin. Metode Galerkin merupakan metode yang digunakan untuk mendekati penyelesaian dari suatu persamaan operator. Dimisalkan V suatu ruang Hilbert dan a pemetaan yang memetakan $V \times V$ ke \mathbb{R} . Dimisalkan pula $\ell \in V'$. Suatu permasalahan diinisiasi sebagai persoalan mencari $u \in V$ yang memenuhi $a(u, v) = \ell(v)$ untuk setiap $v \in V$. Diasumsikan a terbatas dan V -elliptic. Berdasarkan lemma Lax-Milgram permasalahan ini memiliki solusi tunggal.

Secara umum, tidak mungkin menemukan solusi eksak dari permasalahan tersebut, karena dimungkinkan V berdimensi

tak hingga. Untuk itu digunakan pendekatan dengan menyelesaikan problem yang sama pada ruang berdimensi hingga. Itu artinya problem tersebut disederhanakan menjadi persoalan mencari $u_N \in V_N$ yang memenuhi $a(u_N, v) = \ell(v)$ untuk setiap $v \in V_N$. Himpunan V_N menyatakan subruang dari V yang berdimensi N . Berdasarkan lemma Lax-Milgram permasalahan ini juga memiliki solusi tunggal.

Karena V_N merupakan ruang berdimensi N , maka terdapat himpunan $\{\phi_i\}_{i=1}^N$ sedemikian sehingga himpunan tersebut merupakan basis dari V_N . Vektor u_N merupakan anggota dari V_N sehingga dapat dituliskan

$$u_N = \sum_{i=1}^N \xi_i \phi_i$$

dengan $\xi_i \in \mathbb{R}$. Jika diambil $v = \phi_i$ untuk setiap $i = 1, 2, \dots, N$ maka didapatkan persamaan model

$$A\xi = \mathbf{b}$$

dengan $\xi = (\xi_i) \in \mathbb{R}^N$, $\mathbf{b} = (\ell(\phi_i)) \in \mathbb{R}^N$, dan $A = (a(\phi_i, \phi_j)) \in \mathbb{R}^{N \times N}$ yang disebut matriks kekakuan (*stiffness*).

Solusi u_N secara umum berbeda dengan solusi u . Untuk meminimalkan selisih, dalam hal ini berupa norma, antara u dan u_N dipilih nilai N yang semakin besar. Itu artinya jika dipilih barisan naik N_1, N_2, \dots maka ada solusi u_{N_1}, u_{N_2}, \dots secara berurutan berada di ruang V_{N_1}, V_{N_2}, \dots dengan $V_{N_1} \subset V_{N_2} \subset \dots$. Proses pencarian solusi u_{N_1}, u_{N_2}, \dots ini disebut dengan metode Galerkin.

Metode elemen hingga merupakan metode Galerkin dengan menambahkan syarat bahwa fungsi ϕ_i , untuk setiap $i = 1, 2, \dots, N$ merupakan fungsi yang sepotong-sepotong halus (*piecewise smooth*). Tujuan dari pemilihan fungsi ini adalah untuk mendapatkan matriks kekakuan (*stiffness*) yang

jarang(*sparse*). Matriks jarang merupakan matriks yang sebagian besar elemennya nol[6].

Metode elemen hingga disebut metode paling sederhana dari metode Galerkin karena dibatasi oleh 3 sifat utamanya. Sifat yang pertama adalah domain $\bar{\Omega}$ dapat didiskritkan ke dalam berhingga elemen. Domain $\bar{\Omega}$ dipartisi menjadi himpunan T_N yang anggota-anggotanya $K \in \mathbb{R}^m$ sedemikian sehingga:

1. $\bar{\Omega} = \cup_{K \in T_N} K$,
2. untuk setiap $K \in T_N$, K tertutup dan interiornya bukan himpunan kosong,
3. untuk setiap $K_1, K_2 \in T_N$, irisan interior K_1 dan K_2 merupakan himpunan kosong,
4. untuk setiap $K \in T_N$, batas dari K bersifat kontinu Lipschitz.

Syarat kedua berkaitan dengan pendefisian $P_K = \{v_N \mid_K : v_N \in V_N\}$ untuk setiap $K \in T_N$. Fungsi $v_N \mid_K$ menyatakan fungsi v_N yang dibatasi pada domain K . Untuk setiap K berlaku sifat bahwa P_K memuat fungsi yang merupakan polinomial atau dekat dengan keluarga fungsi polinomial. Syarat ketiga adalah terdapat fungsi basis dari V_N sedemikian sehingga memiliki pra peta tak nol(*support*) sekecil mungkin[7].

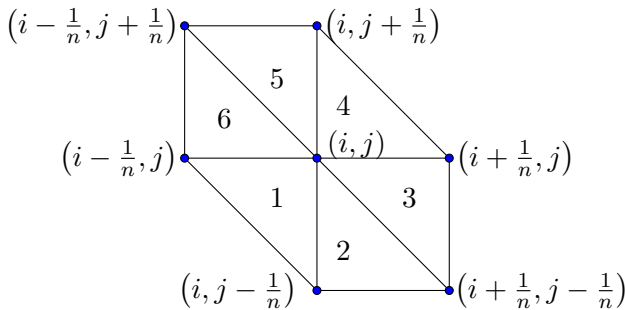
Berdasarkan sifat tersebut maka dapat dipilih fungsi-fungsi pada V_N sehingga P_K merupakan polinomial di setiap $K \in T_N$. Itu artinya dapat dipilih ruang fungsi V_N sehingga

$$V_N = \{v_N \in C(\bar{\Omega}) \mid v_N \mid_K \in \mathbb{P}_m \forall K \in T_N\}$$

Dengan kata lain, setiap fungsi di V_N sepotong-sepotong merupakan polinomial berderajat maksimal m [6].

Pencarian fungsi pendekatan u_N dikaitkan dengan ruang fungsi V_N , yaitu himpunan fungsi yang sepotong-sepotong merupakan polinomial di himpunan Ω . Karena $u_N \in V_N$ maka fungsi u_N dapat dinyatakan dalam kombinasi linear dari pembangun-pembangun V_N . Dimisalkan $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N$ pembangun dari V_N . Jika $V_N \subset \mathbb{P}_1$, pada triangularisasi domain tersebut, dapat dipilih fungsi basis dengan *support* berbentuk segi enam.

Dimisalkan $\phi_{(i,j)}$ suatu fungsi basis yang terdefinisi pada elemen yang memuat titik dengan koordinat (i, j) . Domain yang menyebabkan fungsi tersebut tak nol berbentuk segienam sebagai berikut:



Setiap elemen pada segienam dinomori dengan bilangan 1 sampai dengan 6 berlawanan arah jarum jam. Fungsi $\phi_{(i,j)}$ memenuhi sifat pada elemen 1 sampai dengan 6 merupakan polinomial linear. Selain itu juga memenuhi sifat $\phi_{(i,j)}(i, j) = 1$ dan untuk setiap titik dengan koordinat $p \neq i$, atau $q \neq j$ berlaku $\phi_{(i,j)}(p, q) = 0$. Di luar segienam tersebut, nilai fungsi $\phi_{(i,j)}$ adalah nol.

Dimisalkan fungsi $\phi_{(i,j)}^{(s)}$ yang menyatakan pembatasan fungsi $\phi_{(i,j)}$ pada domain bernomor s , $s = 1, 2, \dots, 6$. Saat $s = 1$, karena $\phi_{(i,j)}^{(1)}$ polinomial linear, maka untuk setiap (x, y)

di region 1, berlaku $\phi_{(i,j)}^{(1)}(x, y) = a^{(1)}x + b^{(1)}y + c^{(1)}$. Akibatnya

$$\begin{aligned}\phi_{(i,j)}^{(1)}(i, j) &= a^{(1)}i + b^{(1)}j + c^{(1)} \\ \phi_{(i,j)}^{(1)}\left(i - \frac{1}{n}, j\right) &= a^{(1)}\left(i - \frac{1}{n}\right) + b^{(1)}j + c^{(1)} \\ \phi_{(i,j)}^{(1)}\left(i, j - \frac{1}{n}\right) &= a^{(1)}i + b^{(1)}\left(j - \frac{1}{n}\right) + c^{(1)}\end{aligned}$$

Dalam bentuk perkalian matriks, ketiga persamaan tersebut dapat dituliskan dalam

$$\begin{pmatrix} i & j & 1 \\ i - \frac{1}{n} & j & 1 \\ i & j - \frac{1}{n} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^{(1)} \\ b^{(1)} \\ c^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sehingga

$$\begin{pmatrix} a^{(1)} & b^{(1)} & c^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & n & 1 - ni - nj \end{pmatrix}$$

Dengan cara yang sama untuk $s = 2$ sampai $s = 6$ diperoleh:

$$\begin{pmatrix} i & j & 1 \\ i & j - \frac{1}{n} & 1 \\ i + \frac{1}{n} & j - \frac{1}{n} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^{(2)} \\ b^{(2)} \\ c^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} i & j & 1 \\ i + \frac{1}{n} & j - \frac{1}{n} & 1 \\ i + \frac{1}{n} & j & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^{(3)} \\ b^{(3)} \\ c^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} i & j & 1 \\ i + \frac{1}{n} & j & 1 \\ i & j + \frac{1}{n} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^{(4)} \\ b^{(4)} \\ c^{(4)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} i & j & 1 \\ i & j + \frac{1}{n} & 1 \\ i - \frac{1}{n} & j + \frac{1}{n} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^{(5)} \\ b^{(5)} \\ c^{(5)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

dan

$$\begin{pmatrix} i & j & 1 \\ i - \frac{1}{n} & j + \frac{1}{n} & 1 \\ i - \frac{1}{n} & j & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^{(6)} \\ b^{(6)} \\ c^{(6)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

maka

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a^{(2)} & b^{(2)} & c^{(2)} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & n & 1 - nj \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} a^{(3)} & b^{(3)} & c^{(3)} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -n & 0 & 1 + ni \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} a^{(4)} & b^{(4)} & c^{(4)} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -n & -n & 1 + ni + nj \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} a^{(5)} & b^{(5)} & c^{(5)} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & -n & 1 + nj \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} a^{(6)} & b^{(6)} & c^{(6)} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} n & 0 & 1 - ni \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Secara global, untuk setiap titik (i, j) pada domain Ω , berlaku keenam persamaan matriks di atas. Akibatnya untuk setiap $(i, j) \in \Omega$ dan $s \in \{1, 2, \dots, 6\}$ berlaku

$$\begin{aligned} \nabla \phi_{(i,j)}^{(s)} &= \frac{\partial \phi_{(i,j)}^{(s)}}{\partial x} + \frac{\partial \phi_{(i,j)}^{(s)}}{\partial y} \\ &= a^{(s)} + b^{(s)}, \end{aligned}$$

sedangkan, nilai $\nabla \phi_{(i,j)} = 0$ untuk setiap daerah domain di luar segienam, karena nilai fungsinya konstan nol.

2.4 Metode Konjugasi Gradien

Metode gradien konjugasi adalah salah satu metode untuk mendekati vektor x jika diberikan suatu matriks A dan vektor b yang memenuhi persamaan $Ax = b$. Metode ini merupakan salah satu metode iterasi. Adapun cara kerja dari metode

tersebut dimulai dari memilih suatu vektor x_0 kemudian mencari nilai $r_0 = b - Ax_0$ dan $p_0 = r_0$. Untuk setiap iterasinya ke- i dilakukan proses berikut:

1. menghitung nilai $\alpha_i = \frac{(r_i, r_i)}{(Ap_i, p_i)}$
2. melakukan update $x_{i+1} = x_i + \alpha_i p_i$
3. melakukan update $r_{i+1} = r_i - \alpha_i Ap_i$
4. menghitung nilai $\beta_i = \frac{(r_{i+1}, r_{i+1})}{(r_i, r_i)}$
5. melakukan update $p_{i+1} = r_{i+1} + \beta_i p_i$

Iterasi dilakukan sampai batas tertentu, misalkan sejumlah n iterasi atau sampai norma dari $b - Ax_i$ bernilai cukup kecil.[4]

BAB III

METODE PENELITIAN

Dalam bab ini diuraikan langkah-langkah sistematis yang dilakukan dalam proses pengerjaan Tugas Akhir. Tahapan penelitian dalam Tugas Akhir ini terdiri dari dua tahapan, yaitu studi literatur dan simulasi.

3.1 Studi Literatur

Pada tahap ini dilakukan identifikasi permasalahan yang akan dibahas. Dari permasalahan dan tujuan yang telah dirumuskan, selanjutnya dilakukan studi literatur untuk mendukung pengerjaan Tugas Akhir dan pemahaman yang lebih mendalam tentang metode yang akan digunakan untuk menyelesaikan permasalahan dalam Tugas Akhir. Literatur yang dipelajari bersumber dari buku, jurnal, penelitian sebelumnya, dan dari website-website di internet.

3.2 Penjabaran Forward Problem

Pada tahap ini forward problem dijabarkan. Penjabaran dilakukan dengan menggunakan metode yang telah dipelajari dari studi literatur, yaitu metode elemen hingga sampai menghasilkan matriks kekakuan. Bentuk terakhir dari persamaan forward model yang melibatkan matriks kekakuan kemudian diselesaikan dengan metode konjugasi gradien.

BAB IV

ANALISIS DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini dibahas mengenai inti dari pengerjaan Tugas Akhir yakni perumusan dan penyelesaian forward problem. Perumusan dan penyelesaian forward problem meliputi diskritisasi domain, perhitungan matriks kekakuan, serta penggunaan metode konjugasi gradien.

4.1 Perumusan Forward Problem

Berdasarkan persamaan (2.3) persamaan resistivitas arus searah dapat dirumuskan sebagai

$$-\nabla \cdot (\sigma \nabla U) = I \text{ di } \Omega$$

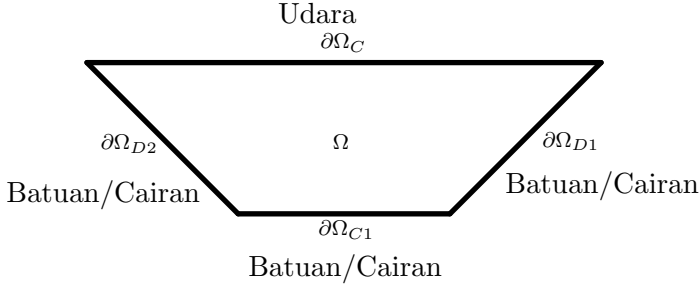
Domain Ω merupakan potongan penampang bumi seperti pada Gambar 4.1. Bagian $\partial\Omega_C$ merupakan suatu garis lurus yang ditarik pada permukaan bumi dengan panjang tertentu. Garis ini dibagi ke dalam beberapa titik untuk menempatkan elektroda-elektroda dalam pengukuran. Domain Ω berada di dalam bumi di bawah $\partial\Omega_C$ berdasarkan *Pseudosection*. Fungsi-fungsi resistivitas (σ), potensial(U), dan besarnya arus(I) didefinisikan pada domain $\bar{\Omega}$ yaitu Ω beserta batas di sekelilingnya.

Pada batas di sekeliling Ω berlaku syarat batas

$$\frac{\partial U}{\partial \mathbf{n}} = 0$$

pada bagian dari domain yang berbatasan dengan udara dan syarat batas

$$\frac{\partial U}{\partial \mathbf{n}} + \beta U = 0$$



Gambar 4.1: Domain dari forward model.

pada bagian dari domain yang berbatasan dengan batuan atau cairan di luar domain seperti pada gambar 4.1.

Diasumsikan bahwa fungsi $U \in H_0^1(\Omega)$. Berdasarkan asumsi tersebut, jika model dikalikan dengan sebarang fungsi $\omega \in H_0^1(\Omega)$ dan kemudian diintegrasikan terhadap domain, maka diperoleh

$$-\int_{\Omega} \omega \nabla \cdot (\sigma \nabla U) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \omega I d\mathbf{x} \quad (4.1)$$

Formula integrasi parsial menyatakan bahwa untuk setiap lapangan vektor u pada \mathbb{R}^d dan fungsi $v \in C^1(\Omega)$ berlaku[?]

$$\int_{\Omega} v \nabla \cdot u d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} u \cdot \nabla v d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} uv \cdot \mathbf{n} ds$$

Dengan mensubstitusikan $v = \omega$ dan $u = \sigma \nabla U$ diperoleh

$$\int_{\Omega} \sigma \nabla U \cdot \nabla \omega d\mathbf{x} - \int_{\partial\Omega} \omega \sigma \nabla U \cdot \mathbf{n} ds = \int_{\Omega} \omega I d\mathbf{x} \quad (4.2)$$

Pada permasalahan ini, domain pengukuran ditempatkan dalam koordinat kartesius menurut syarat batasnya. Batas $\partial\Omega$

dibagi menjadi 3 bagian. Bagian pertama $\partial\Omega_C$ merupakan bagian yang berbatasan dengan permukaan tanah. Bagian kedua $\partial\Omega_{D1}$ merupakan bagian yang bertemu dengan bagian tanah lain yang sejajar sumbu- x . Bagian ketiga $\partial\Omega_{D2}$ merupakan bagian yang bertemu dengan bagian tanah lain yang sejajar sumbu- y . Karena ketidak lengkapan data pengukuran, menyebabkan batas bertambah menjadi 4 bagian. Batas tambahan adalah bagian domain yang berbatasan dengan bagian tanah lain dengan batas sejajar dengan permukaan tanah. Batas ini dinotasikan dengan $\partial\Omega_{C1}$. Ini artinya

$$\begin{aligned} & \int_{\partial\Omega} \omega\sigma\nabla U \cdot \mathbf{n}ds \\ &= \int_{\partial\Omega_C} \omega\sigma\nabla U \cdot \mathbf{n}ds + \int_{\partial\Omega_{D1}} \omega\sigma\nabla U \cdot \mathbf{n}ds \\ &+ \int_{\partial\Omega_{D2}} \omega\sigma\nabla U \cdot \mathbf{n}ds + \int_{\partial\Omega_{C1}} \omega\sigma\nabla U \cdot \mathbf{n}ds \end{aligned}$$

Dimisalkan \mathbf{i} dan \mathbf{j} secara berurutan merupakan vektor normal yang sejajar sumbu- x dan sumbu- y .

1. Batas $\partial\Omega_C$ berupa garis lurus yang memiliki gradien -1 . Vektor normal dari batas ini adalah $\mathbf{n} = \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{j}$. Sehingga

$$\begin{aligned} \nabla U \cdot \mathbf{n} &= \left(\frac{\partial U}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\mathbf{j} \right) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{j} \right) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

Menurut syarat batas diketahui bahwa

$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{\partial U}{\partial \mathbf{n}} \\
 &= \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \mathbf{n}} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \mathbf{n}} \\
 &= \sqrt{2} \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} \right)
 \end{aligned}$$

Akibatnya $\nabla U \cdot \mathbf{n} = 0$ yang menghasilkan

$$\int_{\partial\Omega_C} \omega \sigma \nabla U \cdot \mathbf{n} ds = 0$$

2. Karena batas $\partial\Omega_{D1}$ sejajar sumbu- x , maka vektor normalnya adalah $\mathbf{n} = \mathbf{j}$. Didapat

$$\begin{aligned}
 \nabla U \cdot \mathbf{n} &= \left(\frac{\partial U}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \mathbf{j} \right) \cdot \mathbf{j} \\
 &= \frac{\partial U}{\partial y}
 \end{aligned}$$

Menurut syarat batas diketahui bahwa

$$\begin{aligned}
 &\frac{\partial U}{\partial \mathbf{n}} + \beta U = 0 \\
 \Longleftrightarrow &\frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \mathbf{n}} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \mathbf{n}} = -\beta U \\
 \Longleftrightarrow &\frac{\partial U}{\partial y} = -\beta U
 \end{aligned}$$

Sehingga

$$\int_{\partial\Omega_{D1}} \omega \sigma \nabla U \cdot \mathbf{n} ds = - \int_{\partial\Omega_{D1}} \omega \sigma \beta U ds$$

3. Karena batas $\partial\Omega_{D2}$ sejajar sumbu- y , maka vektor normalnya adalah $\mathbf{n} = \mathbf{i}$. Didapat

$$\begin{aligned}\nabla U \cdot \mathbf{n} &= \left(\frac{\partial U}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \mathbf{j} \right) \cdot \mathbf{i} \\ &= \frac{\partial U}{\partial x}\end{aligned}$$

Menurut syarat batas diketahui bahwa

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial \mathbf{n}} + \beta U &= 0 \\ \iff \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \mathbf{n}} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \mathbf{n}} &= -\beta U \\ \iff \frac{\partial U}{\partial x} &= -\beta U\end{aligned}$$

Sehingga

$$\int_{\partial\Omega_{D2}} \omega \sigma \nabla U \cdot \mathbf{n} ds = - \int_{\partial\Omega_{D2}} \omega \sigma \beta U ds$$

4. Batas Ω_{C1} berupa garis lurus yang memiliki gradien -1 . Vektor normal dari batas ini adalah $\mathbf{n} = \frac{\sqrt{2}}{2} \mathbf{i} + \frac{\sqrt{2}}{2} \mathbf{j}$. Sehingga

$$\begin{aligned}\nabla U \cdot \mathbf{n} &= \left(\frac{\partial U}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \mathbf{j} \right) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \mathbf{i} + \frac{\sqrt{2}}{2} \mathbf{j} \right) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} \right)\end{aligned}$$

Menurut syarat batas diketahui bahwa

$$\begin{aligned} & \frac{\partial U}{\partial \mathbf{n}} + \beta U = 0 \\ \iff & \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \mathbf{n}} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \mathbf{n}} = -\beta U \\ \iff & \sqrt{2} \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} \right) = -\beta U \end{aligned}$$

Diperoleh

$$\nabla U \cdot \mathbf{n} = \frac{-\beta U}{2}$$

dan juga

$$\int_{\partial\Omega_{C1}} \omega \sigma \nabla U \cdot \mathbf{n} ds = -\frac{1}{2} \int_{\partial\Omega_{D2}} \omega \sigma \beta U ds$$

Menurut prinsip dari metode elemen hingga, nilai potensial U dapat didekati dengan fungsi U_N yakni

$$U \approx U_N = \sum_{i=1}^N \alpha_i \phi_i$$

Karena itu solusi dari persamaan (4.2) dapat didekati dengan

menyelesaikan persamaan

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \omega I d\mathbf{x} &= - \int_{\partial\Omega_C} \omega \sigma \nabla U \cdot \mathbf{n} ds - \int_{\partial\Omega_{D1}} \omega \sigma \nabla U \cdot \mathbf{n} ds \\
&\quad - \int_{\partial\Omega_{D2}} \omega \sigma \nabla U \cdot \mathbf{n} ds - \int_{\partial\Omega_{C1}} \omega \sigma \nabla U \cdot \mathbf{n} ds \\
&\quad + \int_{\Omega} \sigma \nabla U \cdot \nabla \omega d\mathbf{x} \\
&= \int_{\partial\Omega_{D1}} \omega \sigma \beta U_N ds + \int_{\partial\Omega_{D2}} \omega \sigma \beta U_N ds \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega_{C1}} \omega \sigma \beta U_N ds + \int_{\Omega} \sigma \nabla U_N \cdot \nabla \omega d\mathbf{x} \\
&= \int_{\partial\Omega_{D1}} \omega \sigma \beta \sum_{i=1}^N \alpha_i \phi_i ds + \int_{\partial\Omega_{D2}} \omega \sigma \beta \sum_{i=1}^N \alpha_i \phi_i ds \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega_{C1}} \omega \sigma \beta \sum_{i=1}^N \alpha_i \phi_i ds + \int_{\Omega} \sigma \sum_{i=1}^N \alpha_i \nabla \phi_i \cdot \nabla \omega d\mathbf{x} \\
&= \sum_{i=1}^N \alpha_i \left(\int_{\partial\Omega_{D1}} \omega \sigma \beta \phi_i ds + \int_{\partial\Omega_{D2}} \omega \sigma \beta \phi_i ds \right) \\
&\quad + \sum_{i=1}^N \alpha_i \left(\frac{1}{2} \int_{\partial\Omega_{C1}} \omega \sigma \beta \phi_i ds + \int_{\Omega} \sigma \nabla \phi_i \cdot \nabla \omega d\mathbf{x} \right)
\end{aligned}$$

Karena fungsi ω sebarang, maka ω dapat dipilih basis-basis $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N$. Hal itu berarti bahwa untuk setiap $j =$

1, 2, \dots, N jika dipilih $\omega = \phi_j$, maka berlaku

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} \omega I d\mathbf{x} &= \sum_{i=1}^N \alpha_i \left(\int_{\partial\Omega_{D1}} \omega \sigma \beta \phi_i d\mathbf{s} + \int_{\partial\Omega_{D2}} \omega \sigma \beta \phi_i d\mathbf{s} \right) \\
 &\quad + \sum_{i=1}^N \alpha_i \left(\frac{1}{2} \int_{\partial\Omega_{C1}} \omega \sigma \beta \phi_i d\mathbf{s} + \int_{\Omega} \sigma \nabla \phi_i \cdot \nabla \omega d\mathbf{x} \right) \\
 \Leftrightarrow \int_{\Omega} \phi_j I d\mathbf{x} &= \sum_{i=1}^N \alpha_i \left(\int_{\partial\Omega_{D1}} \phi_j \sigma \beta \phi_i d\mathbf{s} + \int_{\partial\Omega_{D2}} \phi_j \sigma \beta \phi_i d\mathbf{s} \right) \\
 &\quad + \sum_{i=1}^N \alpha_i \left(\frac{1}{2} \int_{\partial\Omega_{C1}} \phi_j \sigma \beta \phi_i d\mathbf{s} + \int_{\Omega} \sigma \nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_j d\mathbf{x} \right)
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

Dimisalkan $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_i)^T$ merupakan matriks kolom yang elemen-elemennya adalah α_i , dengan $i = 1, 2, \dots, N$. Didefinisikan pula matriks baris $\mathbf{A}_j = (a_i)$ dengan

$$a_i = \int_{\partial\Omega_{D1}} \sigma \beta \phi_j \phi_i d\mathbf{s} + \int_{\partial\Omega_{D2}} \sigma \beta \phi_j \phi_i d\mathbf{s} \tag{4.4}$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega_{C1}} \sigma \beta \phi_j \phi_i d\mathbf{s} + \int_{\Omega} \sigma \nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_j d\mathbf{x} \tag{4.5}$$

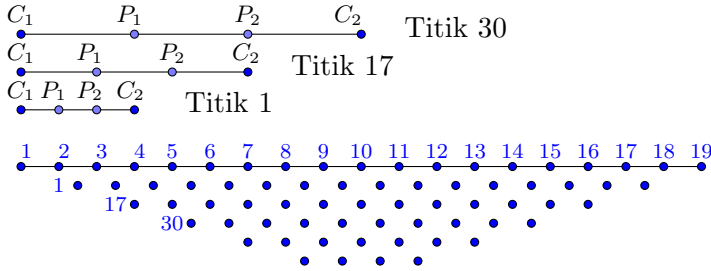
Persamaan (4.3) dapat dituliskan dalam

$$\mathbf{A}_j \boldsymbol{\alpha} = \int_{\Omega} \phi_j I d\mathbf{x}$$

Karena nilai j bergerak dari 1 sampai N , dengan mendefinisikan matriks kolom $\mathbf{b} = \left(\int_{\Omega} \phi_j I d\mathbf{x} \right)$ dan $\mathbf{A} = (\mathbf{A}_j)$ diperoleh persamaan $\mathbf{A} \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{b}$.

4.2 Penggambaran dan Diskritisasi Blok Model

Blok model, yaitu domain Ω , digambarkan dengan menggunakan *pseudosection*. *Pseudosection* merupakan blok 2 dimensi. *Pseudosection* menggambarkan titik-titik ditemplatkannya elektroda berupa garis lurus dengan jarak antar titiknya konstan. Dibawah garis tersebut, domain Ω , ditempatkan.



Gambar 4.2: *Pseudosection* untuk Konfigurasi Wenner

Setiap blok terdiri dari beberapa layer. Layer ke- n menyatakan jarak antar elektroda sejauh n satuan. Penggambaran setiap titik, didapatkan perpotongan garis dengan sudut -45° dari elektroda P_1 dan 45° dari elektroda P_2 . Secara umum daerah yang akan diukur resistivitasnya dapat digambarkan dalam bentuk segitiga siku-siku samakaki. Untuk mendapatkan nilai fungsi U pada semua area domain dilakukan prosedur sesuai dengan metode elemen hingga. Prosedur diawali dengan melakukan diskritisasi dari domain. Domain didiskritkan menjadi elemen-elemen segitiga. Prosedur ini disebut triangularisasi.

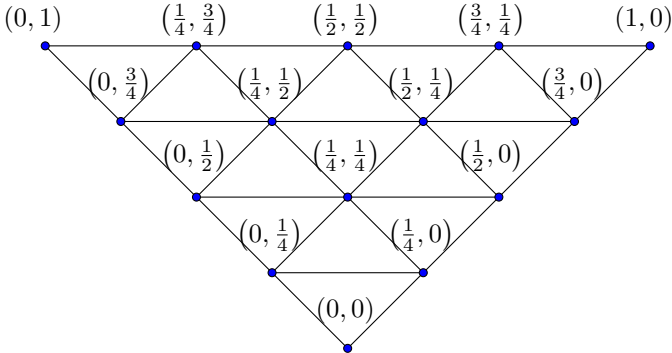
Proses triangularisasi dilakukan dengan memilih $n - 1$ titik pada segmen AB . Dimisalkan titik-titik yang dipilih, secara berurutan dari yang terdekat dengan titik A , adalah C_1, C_2, \dots, C_{n-1} . Titik-titik tersebut dipilih sedemikian

sehingga

$$AC_1 = C_1C_2 = \cdots = C_{n-1}B$$

Kemudian untuk setiap $i = 1, 2, \dots, n-1$ dari titik C_i ditarik garis sejajar BC dan AC . Titik potong garis yang ditarik dari titik C_i yang sejajar BC dengan segmen CA dimisalkan dengan B_i . Titik potong garis yang ditarik dari titik C_i yang sejajar CA dengan segmen BC dimisalkan dengan A_i . Selanjutnya untuk setiap $i = 1, 2, \dots, n-1$ segmen A_iB_{n-i} dihubungkan. Segitiga-segitiga yang terbentuk merupakan triangularisasi dari domain Ω .

Setelah dilakukan proses diskritisasi, proses berikutnya adalah menentukan sistem koordinat yang digunakan. Demi memudahkan perhitungan nilai fungsi U digunakan sistem koordinat kartesius. Domain Ω dilatasi dan rotasi sehingga C berimpit dengan koordinat $(0,0)$, B berimpit dengan koordinat $(1,0)$, serta A berimpit dengan koordinat $(0,1)$. Gambar 4.2 merupakan contoh diskritisasi saat $n = 4$.



Gambar 4.3: Diskritisasi Domain

4.3 Perhitungan Matriks Kekakuan

Dari persamaan (4.3), untuk suatu nilai l yang tetap, perlu dihitung nilai

$$\int_{\Omega} \sigma \nabla \phi_k \cdot \nabla \phi_l d\mathbf{x}$$

dan

$$\int_{\partial\Omega_{D1}} \sigma \beta \phi_k \phi_l ds + \int_{\partial\Omega_{D2}} \sigma \beta \phi_k \phi_l ds + \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega_{C1}} \sigma \beta \phi_k \phi_l ds$$

Untuk setiap elemen $K \in T_N$, sebelum dilakukan perbaikan menggunakan invers problem, diasumsikan nilai fungsi σ konstan. Jika $k = (i_1, j_1)$ dan $l = (i_2, j_2)$ maka

$$\int_{\Omega} \sigma \nabla \phi_k \cdot \nabla \phi_l d\mathbf{x} = \sum_{K \in T_N} \sigma(K) \nabla \phi_{(i_1, j_1)} \cdot \nabla \phi_{(i_2, j_2)}$$

Ruas kanan dapat dihitung dengan menentukan irisan himpunan support dari $\phi_{(i_1, j_1)}$ dan $\phi_{(i_2, j_2)}$.

Dimisalkan $K_{(i,j)}^{(s)}$ elemen dari himpunan *support* $\phi_{(i,j)}$ yang bernomor $s \in 1, 2, \dots, 6$. Jika $(i_2, j_2) = (i_1, j_1)$ maka

$$\begin{aligned} \nabla \phi_{(i_1, j_1)} \cdot \nabla \phi_{(i_2, j_2)}(\mathbf{x}) &= \nabla \phi_{(i_1, j_1)} \cdot \nabla \phi_{(i_1, j_1)}(\mathbf{x}) \\ &= \begin{cases} (a^{(1)} + b^{(1)})^2 & \text{jika } \mathbf{x} \in K_{(i_1, j_1)}^{(1)} \\ (a^{(2)} + b^{(2)})^2 & \text{jika } \mathbf{x} \in K_{(i_1, j_1)}^{(2)} \\ (a^{(3)} + b^{(3)})^2 & \text{jika } \mathbf{x} \in K_{(i_1, j_1)}^{(3)} \\ (a^{(4)} + b^{(4)})^2 & \text{jika } \mathbf{x} \in K_{(i_1, j_1)}^{(4)} \\ (a^{(5)} + b^{(5)})^2 & \text{jika } \mathbf{x} \in K_{(i_1, j_1)}^{(5)} \\ (a^{(6)} + b^{(6)})^2 & \text{jika } \mathbf{x} \in K_{(i_1, j_1)}^{(6)} \end{cases} \end{aligned}$$

akibatnya

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla \phi_{(i_1, j_1)} \cdot \nabla \phi_{(i_2, j_2)} d\mathbf{x} &= \int_K \nabla \phi_{(i_1, j_1)} \cdot \nabla \phi_{(i_1, j_1)} d\mathbf{x} \\ &= \sum_{s=1}^6 \left(a^{(s)} + b^{(s)} \right)^2 \left[K_{(i_1, j_1)}^{(s)} \right] \end{aligned}$$

Notasi $\left[K_{(i_1, j_1)}^{(s)} \right]$ menyatakan luas elemen $K_{(i_1, j_1)}^{(s)}$. Luas elemen $K_{(i_1, j_1)}^{(s)}$ adalah $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{2n^2}$. Sehingga didapat

$$\int_{\Omega} \nabla \phi_{(i_1, j_1)} \cdot \nabla \phi_{(i_2, j_2)} d\mathbf{x} = \sum_{s=1}^6 \frac{\left(a^{(s)} + b^{(s)} \right)^2}{2n^2}$$

Jika $(i_2, j_2) = (i_1 - \frac{1}{n}, j_1)$ maka

$$\begin{aligned} \nabla \phi_{(i_1, j_1)} \cdot \nabla \phi_{(i_2, j_2)}(\mathbf{x}) &= \nabla \phi_{(i_1, j_1)} \cdot \nabla \phi_{(i_1 - \frac{1}{n}, j_1)}(\mathbf{x}) \\ &= \begin{cases} \left(a^{(1)} + b^{(1)} \right) \left(a^{(3)} + b^{(3)} \right) & \text{jika } \mathbf{x} \in K_{(i_1, j_1)}^{(1)} \\ \left(a^{(6)} + b^{(6)} \right) \left(a^{(4)} + b^{(4)} \right) & \text{jika } \mathbf{x} \in K_{(i_1, j_1)}^{(6)} \end{cases} \end{aligned}$$

akibatnya

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla \phi_{(i_1, j_1)} \cdot \nabla \phi_{(i_2, j_2)} d\mathbf{x} &= \int_{\Omega} \nabla \phi_{(i_1, j_1)} \cdot \nabla \phi_{(i_1 - \frac{1}{n}, j_1)} d\mathbf{x} \\ &= \left(a^{(1)} + b^{(1)} \right) \left(a^{(3)} + b^{(3)} \right) \left[K_{(i_1, j_1)}^{(1)} \right] \\ &\quad + \left(a^{(6)} + b^{(6)} \right) \left(a^{(4)} + b^{(4)} \right) \left[K_{(i_1, j_1)}^{(6)} \right] \\ &= \frac{\left(a^{(1)} + b^{(1)} \right) \left(a^{(3)} + b^{(3)} \right)}{2n^2} \\ &\quad + \frac{\left(a^{(6)} + b^{(6)} \right) \left(a^{(4)} + b^{(4)} \right)}{2n^2} \end{aligned}$$

Dengan cara yang sama, secara berturut-turut untuk $(i_2, j_2) = (i_1, j_1 - \frac{1}{n})$, $(i_1 + \frac{1}{n}, j_1 - \frac{1}{n})$, $(i_1 + \frac{1}{n}, j_1)$, $(i_1, j_1 + \frac{1}{n})$, dan $(i_1 - \frac{1}{n}, j_1 + \frac{1}{n})$ berlaku

$$\begin{aligned} & \nabla \phi_{(i_1, j_1)} \cdot \nabla \phi_{(i_1, j_1 - \frac{1}{n})}(\mathbf{x}) \\ &= \begin{cases} (a^{(2)} + b^{(2)}) (a^{(4)} + b^{(4)}) & \text{jika } \mathbf{x} \in K_{(i_1, j_1)}^{(2)} \\ (a^{(1)} + b^{(1)}) (a^{(5)} + b^{(5)}) & \text{jika } \mathbf{x} \in K_{(i_1, j_1)}^{(1)} \end{cases}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \nabla \phi_{(i_1, j_1)} \cdot \nabla \phi_{(i_1 + \frac{1}{n}, j_1 - \frac{1}{n})}(\mathbf{x}) \\ &= \begin{cases} (a^{(3)} + b^{(3)}) (a^{(5)} + b^{(5)}) & \text{jika } \mathbf{x} \in K_{(i_1, j_1)}^{(3)} \\ (a^{(2)} + b^{(2)}) (a^{(6)} + b^{(6)}) & \text{jika } \mathbf{x} \in K_{(i_1, j_1)}^{(2)} \end{cases}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \nabla \phi_{(i_1, j_1)} \cdot \nabla \phi_{(i_1 + \frac{1}{n}, j_1)}(\mathbf{x}) \\ &= \begin{cases} (a^{(4)} + b^{(4)}) (a^{(6)} + b^{(6)}) & \text{jika } \mathbf{x} \in K_{(i_1, j_1)}^{(4)} \\ (a^{(3)} + b^{(3)}) (a^{(1)} + b^{(1)}) & \text{jika } \mathbf{x} \in K_{(i_1, j_1)}^{(3)} \end{cases}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \nabla \phi_{(i_1, j_1)} \cdot \nabla \phi_{(i_1, j_1 + \frac{1}{n})}(\mathbf{x}) \\ &= \begin{cases} (a^{(5)} + b^{(5)}) (a^{(1)} + b^{(1)}) & \text{jika } \mathbf{x} \in K_{(i_1, j_1)}^{(5)} \\ (a^{(4)} + b^{(4)}) (a^{(2)} + b^{(2)}) & \text{jika } \mathbf{x} \in K_{(i_1, j_1)}^{(4)} \end{cases}, \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} & \nabla \phi_{(i_1, j_1)} \cdot \nabla \phi_{(i_1 - \frac{1}{n}, j_1 + \frac{1}{n})}(\mathbf{x}) \\ &= \begin{cases} (a^{(6)} + b^{(6)}) (a^{(2)} + b^{(2)}) & \text{jika } \mathbf{x} \in K_{(i_1, j_1)}^{(6)} \\ (a^{(5)} + b^{(5)}) (a^{(3)} + b^{(3)}) & \text{jika } \mathbf{x} \in K_{(i_1, j_1)}^{(5)} \end{cases} \end{aligned}$$

Untuk nilai (i_2, j_2) selain tujuh titik tersebut, nilai dari $\nabla \phi_{(i_1, j_1)} \nabla \phi_{(i_2, j_2)}$ selalu nol. Akibatnya, saat $(i_2, j_2) =$

$(i_1, j_1 - \frac{1}{n}), (i_1 + \frac{1}{n}, j_1 - \frac{1}{n}), (i_1 + \frac{1}{n}, j_1), (i_1, j_1 + \frac{1}{n})$, dan $(i_1 - \frac{1}{n}, j_1 + \frac{1}{n})$, berlaku

$$\int_{\Omega} \nabla \phi_{(i_1, j_1)} \cdot \nabla \phi_{(i_1, j_1 - \frac{1}{n})} d\mathbf{x} = \frac{(a^{(2)} + b^{(2)}) (a^{(4)} + b^{(4)})}{2n^2} + \frac{(a^{(1)} + b^{(1)}) (a^{(5)} + b^{(5)})}{2n^2},$$

$$\int_{\Omega} \nabla \phi_{(i_1, j_1)} \cdot \nabla \phi_{(i_1 + \frac{1}{n}, j_1 - \frac{1}{n})} d\mathbf{x} = \frac{(a^{(3)} + b^{(3)}) (a^{(5)} + b^{(5)})}{2n^2} + \frac{(a^{(2)} + b^{(2)}) (a^{(6)} + b^{(6)})}{2n^2},$$

$$\int_{\Omega} \nabla \phi_{(i_1, j_1)} \cdot \nabla \phi_{(i_1 + \frac{1}{n}, j_1)} d\mathbf{x} = \frac{(a^{(4)} + b^{(4)}) (a^{(6)} + b^{(6)})}{2n^2} + \frac{(a^{(3)} + b^{(3)}) (a^{(1)} + b^{(1)})}{2n^2},$$

$$\int_{\Omega} \nabla \phi_{(i_1, j_1)} \cdot \nabla \phi_{(i_1, j_1 + \frac{1}{n})} d\mathbf{x} = \frac{(a^{(5)} + b^{(5)}) (a^{(1)} + b^{(1)})}{2n^2} + \frac{(a^{(4)} + b^{(4)}) (a^{(2)} + b^{(2)})}{2n^2},$$

dan

$$\int_{\Omega} \nabla \phi_{(i_1, j_1)} \cdot \nabla \phi_{(i_1 - \frac{1}{n}, j_1 + \frac{1}{n})} d\mathbf{x} = \frac{(a^{(6)} + b^{(6)}) (a^{(2)} + b^{(2)})}{2n^2} + \frac{(a^{(5)} + b^{(5)}) (a^{(3)} + b^{(3)})}{2n^2}.$$

Untuk nilai (i_2, j_2) selain tujuh titik tersebut, nilai dari $\int_{\Omega} \nabla \phi_{(i_1, j_1)} \cdot \nabla \phi_{(i_2, j_2)} d\mathbf{x}$ selalu nol.

Pada batas $\partial\Omega$ yaitu domain yang berbatasan dengan region di luar domain, nilai yang harus dihitung adalah

$$\int_{\partial\Omega_{D1}} \sigma \beta \phi_k \phi_l d\mathbf{s} + \int_{\partial\Omega_{D2}} \sigma \beta \phi_k \phi_l d\mathbf{s} + \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega_{C1}} \sigma \beta \phi_k \phi_l d\mathbf{s}$$

untuk menghitung nilai tersebut, batas $\partial\Omega_{D1}$, $\partial\Omega_{D2}$, dan $\partial\Omega_{C1}$ dapat dilihat sebagai himpunan segmen-segmen. Syarat batas yang digunakan adalah

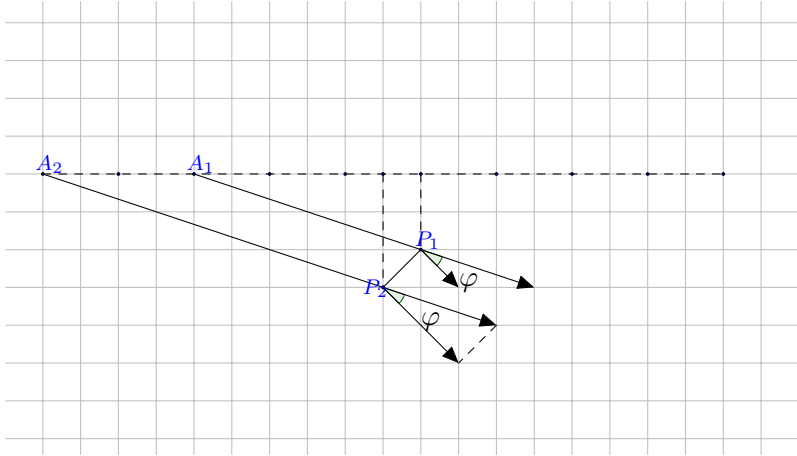
$$\frac{\partial U}{\partial \mathbf{n}} + \beta U = 0$$

Pada Tugas Akhir ini digunakan nilai $\beta = \frac{\cos \varphi}{r}[1]$. Nilai φ menyatakan sudut antara normal permukaan \mathbf{n} dengan garis radial. Garis radial merupakan garis yang menghubungkan titik di $\partial\Omega_{D1}$, $\partial\Omega_{D2}$, maupun $\partial\Omega_{C1}$ dengan sumber arus. Sedangkan nilai r menyatakan jarak antara sumber arus dengan titik pada garis batas.

1. Batas $\partial\Omega_{D1}$ merupakan batas yang sejajar sumbu- x . Hal ini berarti bahwa vektor normal $\mathbf{n} = \mathbf{j}$. Maka $\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial x} = 0$ dan $\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial y} = 1$. Selain itu, batas $\partial\Omega_{D1}$ dapat dilihat sebagai himpunan segmen-segmen, yang setiap segmennya dapat dilihat sebagai suatu segmen yang menghubungkan titik P_1 dengan P_2 . Pada batas ini berlaku

$$\frac{\partial U}{\partial \mathbf{n}} + \frac{\cos \varphi}{r} U = 0$$

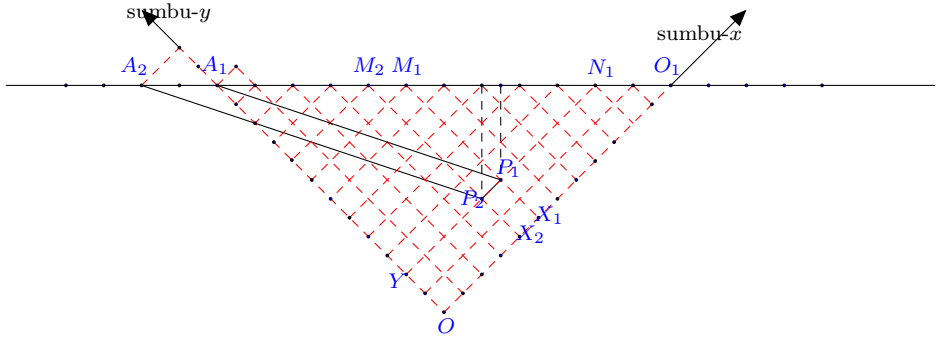
Untuk memasukkan syarat batas ke dalam model, diperlukan nilai dari $\cos \varphi$ dan r . Berdasarkan definisi



Gambar 4.4: Segmen pada batas $\partial\Omega_{D1}$ beserta sudut φ .

φ sendiri, dari Gambar 4.3, diperoleh $\cos \varphi = \frac{2}{\sqrt{2^2+1^2}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

Sedangkan untuk menghitung nilai r , berdasarkan Gambar 4.4 dan konfigurasi Wenner, sumber arus untuk menghitung potensial di P_1 dan P_2 secara berurutan berada pada titik A_1 dan A_2 . Pada konfigurasi Wenner, panjang ruas A_1M_1 dan M_1N_1 sama. Demikian juga panjang ruas A_2M_2 dan M_2N_1 . Koordinat titik P_1 adalah (i_1, j_1) , P_2 adalah $(i_1 - \frac{1}{n}, j_1)$, serta titik-titik seperti A_2 , A_1 , M_2 , M_1 dan N_1 berada pada garis dengan persamaan $x + y = 1$. Dari fakta tersebut diperoleh koordinat N_1 , M_1 , dan M_2 berturut-turut $(1 - j_1, j_1)$, $(i_1, 1 - i_1)$, dan $(i_1 - \frac{1}{n}, 1 - i_1 + \frac{1}{n})$. Sehingga diperoleh koordinat A_1 dan A_2 berturut-turut $2M_1 - N_1 = (2i_1 + j_1 - 1, 2 - 2i_1 - j_1)$ dan $2M_2 - N_1 = (2i_1 + j_1 - \frac{2}{n} - 1, 2 - 2i_1 - j_1 + \frac{2}{n})$. Secara tersirat, panjang segmen A_1P_1 dan A_2P_2 sudah menyatakan nilai



Gambar 4.5: Segmen pada batas $\partial\Omega_{D1}$ beserta jaraknya dengan sumber arus.

r di titik P_1 dan P_2 . Akan tetapi dalam keadaan nyata, yang perlu diperhatikan dalam menghitung nilai r adalah skala dilatasi dan satuan panjang yang digunakan.

Panjang dari A_1P_1 adalah

$$\begin{aligned} & \sqrt{(i_1 + j_1 - 1)^2 + (2 - 2i_1 - 2j_1)^2} \\ &= |i_1 + j_1 - 1| \sqrt{5} \end{aligned}$$

sedangkan panjang A_2P_2 adalah

$$\begin{aligned} & \sqrt{\left(i_1 + j_1 - \frac{1}{n} - 1\right)^2 + \left(2 - 2i_1 - 2j_1 + \frac{2}{n}\right)^2} \\ &= \left|i_1 + j_1 - \frac{1}{n} - 1\right| \sqrt{5} \end{aligned}$$

Panjang dari keduanya belum tentu sama. Akan tetapi yang perlu dicermati adalah besar $\angle P_1A_1M_1$ dan $\angle P_2A_2M_2$ sama. Karenanya untuk setiap titik P_0 pada segmen P_1P_2 dapat diukur dengan meletakkan elektroda arus di A_0 dan elektroda potensial di M_0 sehingga besar $\angle P_0A_0M_0$ sama dengan besar $\angle P_1A_1M_1$ dan $\angle P_2A_2M_2$. Akibatnya posisi sumber arus dapat dinyatakan berdasarkan parameterisasi koordinat dari P_0 . Misalkan koordinat P_0 adalah (x, y) dengan $x = ti_1 + (1-t)(i_1 - \frac{1}{n}) = i_1 + \frac{1-t}{n}$ dan $y = tj_1 + (1-t)j_1 = j_1$ maka koordinat A_0 adalah (x_0, y_0) dengan

$$\begin{aligned} x_0 &= t(2i_1 + j_1 - 1) + (1-t)\left(2i_1 + j_1 - \frac{2}{n} - 1\right) \\ &= 2i_1 + j_1 - 1 + \frac{2(t-1)}{n} \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} y_0 &= t(2 - 2i_1 - j_1) + (1-t)\left(2 - 2i_1 - j_1 + \frac{2}{n}\right) \\ &= 2 - 2i_1 - j_1 + \frac{2(1-t)}{n}. \end{aligned}$$

Nilai t berada pada interval $[0, 1]$. Misalkan skala dilatasi adalah Q , maka panjang A_0P_0 adalah

$$r(P_0) = Q\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}.$$

Pada domain $\partial\Omega_{D1}$, ditinjau pada segmen P_1P_2 , nilai dari

$$\int_{\partial\Omega_{D1}} \sigma\beta\phi_k\phi_l d\mathbf{s}$$

tak nol hanya jika $(k, l) = (P_1, P_2)$ atau $(k, l) = (P_2, P_1)$. Keduanya analog karena

$$\int_{\partial\Omega_{D1}} \sigma\beta\phi_{P_1}\phi_{P_2} d\mathbf{s} = \int_{\partial\Omega_{D1}} \sigma\beta\phi_{P_2}\phi_{P_1} d\mathbf{s}$$

Maka cukup ditinjau pada saat $(k, l) = (P_1, P_2)$. Pada saat σ konstan di sepanjang $\partial\Omega_{D1}$ maka

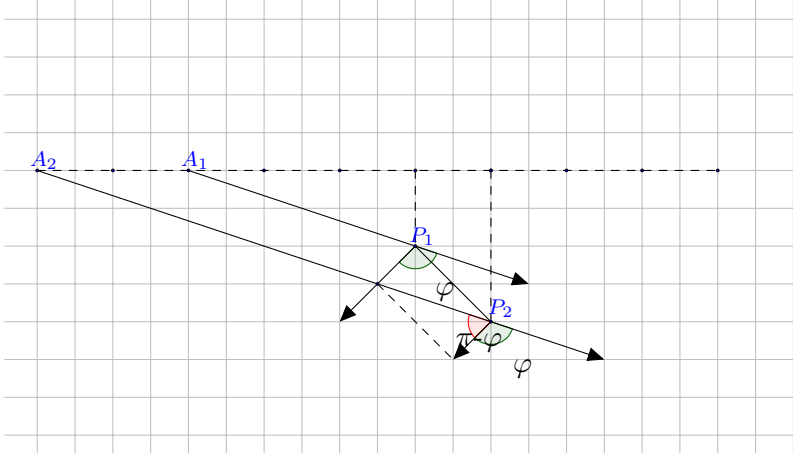
$$\int_{\partial\Omega_{D1}} \sigma\beta\phi_{P_1}\phi_{P_2} d\mathbf{s} = \int_0^1 \sigma(P_0(t)) \frac{2\sqrt{5}}{5r} t(1-t) dt$$

2. Bagian $\partial\Omega_{D2}$ merupakan batas yang sejajar sumbu- y . Hal ini berarti bahwa vektor normal $\mathbf{n} = \mathbf{i}$. Maka $\frac{\partial\mathbf{n}}{\partial x} = 1$ dan $\frac{\partial\mathbf{n}}{\partial y} = 0$. Batas ini bisa dilihat sebagai segmen yang menghubungkan P_1 dan P_2 pada gambar 4.5.

Berdasarkan gambar 4.5 diperoleh

$$\begin{aligned} \cos\varphi &= -\cos(\pi - \varphi) \\ &= -\frac{1}{\sqrt{1^2 + 2^2}} \\ &= -\frac{\sqrt{5}}{5} \end{aligned}$$

Analog dengan kasus batas $\partial\Omega_{D1}$, koordinat titik P_1 adalah (i_1, j_1) , P_2 adalah $(i_1, j_1 - \frac{1}{n})$, serta titik-titik seperti A_2 , A_1 , M_1 , N_1 dan N_2 berada pada



Gambar 4.6: Segmen pada batas $\partial\Omega_{D2}$ beserta sudut φ .

garis dengan persamaan $x + y = 1$. Dari fakta tersebut diperoleh koordinat M_1 , N_1 , dan N_2 berturut-turut $(i_1, 1 - i_1)$, $(1 - j_1, j_1)$, dan $(1 - j_1 + \frac{1}{n}, j_1 - \frac{1}{n})$. Sehingga diperoleh koordinat A_1 dan A_2 berturut-turut $2M_1 - N_1 = (2i_1 + j_1 - 1, 2 - 2i_1 - j_1)$ dan $2M_1 - N_2 = (2i_1 + j_1 - \frac{1}{n} - 1, 2 - 2i_1 - j_1 + \frac{1}{n})$. Panjang dari A_1P_1 adalah

$$\begin{aligned} & \sqrt{(i_1 + j_1 - 1)^2 + (2 - 2i_1 - 2j_1)^2} \\ & = |i_1 + j_1 - 1| \sqrt{5} \end{aligned}$$

sedangkan panjang A_2P_2 adalah

$$\begin{aligned} & \sqrt{\left(i_1 + j_1 - \frac{1}{n} - 1\right)^2 + \left(2 - 2i_1 - 2j_1 + \frac{2}{n}\right)^2} \\ & = \left|i_1 + j_1 - \frac{1}{n} - 1\right| \sqrt{5} \end{aligned}$$

Analog dengan kasus $\partial\Omega_{D1}$ untuk setiap titik P_0 pada segmen P_1P_2 koordinat P_0 adalah (x, y) dengan $x = i_1$ dan $y = tj_1 + (1 - t)(j_1 - \frac{1}{n}) = j_1 + \frac{t-1}{n}$. Akibatnya koordinat A_0 adalah (x_0, y_0) dengan

dan

$$\begin{aligned} y_0 &= t(2 - 2i_1 - j_1) + (1 - t) \left(2 - 2i_1 - j_1 + \frac{1}{n} \right) \\ &= 2 - 2i_1 - j_1 + \frac{1 - t}{n}. \end{aligned}$$

Nilai t berada pada interval $[0, 1]$. Misalkan skala dilatasi adalah Q , maka panjang A_0P_0 adalah

$$r(P_0) = Q\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}.$$

Pada domain $\partial\Omega_{D1}$, ditinjau pada segmen P_1P_2 , nilai dari

$$\int_{\partial\Omega_{D1}} \sigma\beta\phi_k\phi_l ds$$

tak nol hanya jika $(k, l) = (P_1, P_2)$ atau $(k, l) = (P_2, P_1)$. Keduanya analog karena

$$\int_{\partial\Omega_{D1}} \sigma\beta\phi_{P_1}\phi_{P_2} ds = \int_{\partial\Omega_{D1}} \sigma\beta\phi_{P_2}\phi_{P_1} ds$$

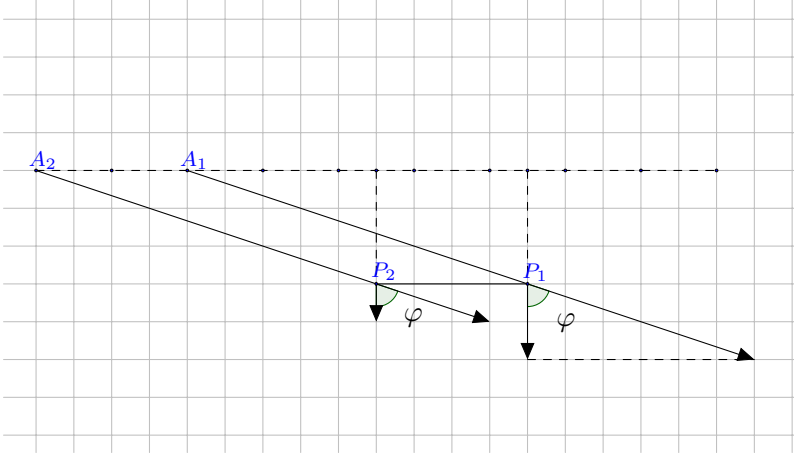
Maka cukup ditinjau pada saat $(k, l) = (P_1, P_2)$. Pada saat σ konstan di sepanjang $\partial\Omega_{D1}$ maka

$$\int_{\partial\Omega_{D1}} \sigma\beta\phi_{P_1}\phi_{P_2} ds = - \int_0^1 \sigma(P_0(t)) \frac{\sqrt{5}}{5r} t(1-t) dt$$

3. Batas $\partial\Omega_{C1}$ merupakan batas yang sejajar permukaan tanah, yaitu sejajar dengan garis bergradien -1 , dengan vektor normal $\mathbf{n} = \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{j}$. Maka $\frac{\partial\mathbf{n}}{\partial x} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ dan $\frac{\partial\mathbf{n}}{\partial y} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Berdasarkan gambar 4.7 diperoleh $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$

Analog dengan kasus batas $\partial\Omega_{D1}$, koordinat titik P_1 adalah (i_1, j_1) , P_2 adalah $(i_1 - \frac{1}{n}, j_1 + \frac{1}{n})$, serta titik-titik seperti A_2 , A_1 , M_2 , M_1 , N_1 dan N_2 berada



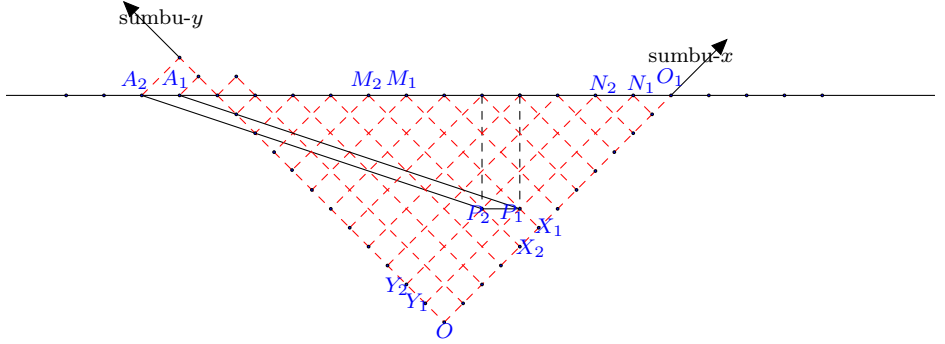
Gambar 4.8: Segmen pada batas $\partial\Omega_{C1}$ beserta sudut φ .

pada garis dengan persamaan $x + y = 1$. Dari fakta tersebut diperoleh koordinat M_1 , M_2 , N_1 , dan N_2 berturut-turut $(i_1, 1 - i_1)$, $(i_1 - \frac{1}{n}, 1 - i_1 + \frac{1}{n})$, $(1 - j_1, j_1)$, dan $(1 - j_1 - \frac{1}{n}, j_1 + \frac{1}{n})$. Sehingga diperoleh koordinat A_1 dan A_2 berturut-turut $2M_1 - N_1 = (2i_1 + j_1 - 1, 2 - 2i_1 - j_1)$ dan $2M_2 - N_2 = (2i_1 + j_1 - \frac{1}{n} - 1, 2 - 2i_1 - j_1 + \frac{1}{n})$. Panjang dari A_1P_1 adalah

$$\begin{aligned} & \sqrt{(i_1 + j_1 - 1)^2 + (2 - 2i_1 - 2j_1)^2} \\ & = |i_1 + j_1 - 1| \sqrt{5} \end{aligned}$$

sedangkan panjang A_2P_2 adalah

$$\begin{aligned} & \sqrt{(i_1 + j_1 - 1)^2 + (2 - 2i_1 - 2j_1)^2} \\ & = |i_1 + j_1 - 1| \sqrt{5} \end{aligned}$$



Gambar 4.9: Segmen pada batas $\partial\Omega_{C1}$ beserta jaraknya dengan sumber arus.

Analog dengan kasus $\partial\Omega_{D1}$ untuk setiap titik P_0 pada segmen P_1P_2 koordinat P_0 adalah (x, y) dengan $x = ti_1 + (1 - t)(i_1 - \frac{1}{n}) = i_1 + \frac{t-1}{n}$ dan $y = tj_1 + (1 - t)(j_1 + \frac{1}{n}) = j_1 + \frac{1-t}{n}$. Akibatnya koordinat A_0 adalah (x_0, y_0) dengan

$$\begin{aligned} x_0 &= t(2i_1 + j_1 - 1) + (1 - t)\left(2i_1 + j_1 - \frac{1}{n} - 1\right) \\ &= 2i_1 + j_1 - 1 + \frac{t-1}{n} \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} y_0 &= t(2 - 2i_1 - j_1) + (1 - t)\left(2 - 2i_1 - j_1 + \frac{1}{n}\right) \\ &= 2 - 2i_1 - j_1 + \frac{1 - t}{n}. \end{aligned}$$

Nilai t berada pada interval $[0, 1]$. Misalkan skala dilatasi adalah Q , maka panjang A_0P_0 adalah

$$r(P_0) = Q\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}.$$

Pada domain $\partial\Omega_{D1}$, ditinjau pada segmen P_1P_2 , nilai dari

$$\int_{\partial\Omega_{D1}} \sigma\beta\phi_k\phi_t d\mathbf{s}$$

tak nol hanya jika $(k, l) = (P_1, P_2)$ atau $(k, l) = (P_2, P_1)$. Keduanya analog karena

$$\int_{\partial\Omega_{D1}} \sigma\beta\phi_{P_1}\phi_{P_2} d\mathbf{s} = \int_{\partial\Omega_{D1}} \sigma\beta\phi_{P_2}\phi_{P_1} d\mathbf{s}$$

Maka cukup ditinjau pada saat $(k, l) = (P_1, P_2)$. Pada saat σ konstan di sepanjang $\partial\Omega_{D1}$ maka

$$\int_{\partial\Omega_{D1}} \sigma\beta\phi_{P_1}\phi_{P_2} d\mathbf{s} = \int_0^1 \sigma(P_0(t)) \frac{2\sqrt{5}}{5r} t(1 - t) dt$$

4.4 Persamaan Forward Problem dan Penyelesaiannya

Pada persamaan forward problem, setiap baris matriks kekakuannya dapat dinyatakan dalam $\mathbf{A}_{\mathbf{j}} = (a_i)$ dengan a_i

seperti pada persamaan (4.4). Pembahasan pada subbab 4.3 menunjukkan cara menghitung nilai dari a_i untuk setiap pasangan indeks titik diskritisasi (i, j) . Indeks masing-masing titik sendiri merupakan penomoran titik mulai dari 1 sampai dengan N . Nilai N sendiri menyatakan banyaknya titik pada diskritisasi domain model.

Nilai j bergerak dari 1 sampai N , maka persamaan forward problemnya adalah $\mathbf{A}\alpha = \mathbf{b}$ dengan $b = \left(\int_{\Omega} \phi_j I d\mathbf{x} \right)$ dan $\mathbf{A} = (\mathbf{A}_j)$. Matriks \mathbf{A} menyatakan matriks kekakuan. Untuk menyelesaikan persamaan forward problem dimulai dari memilih suatu vektor α_0 kemudian mencari nilai $r_0 = b - \mathbf{A}\alpha_0$ dan $p_0 = r_0$. Untuk setiap iterasinya ke- i , $i = 0, 1, 2, \dots$ dilakukan proses berikut:

1. menghitung nilai $\lambda_i = \frac{(r_i, r_i)}{(\mathbf{A}p_i, p_i)}$
2. melakukan update $x_{i+1} = x_i + \lambda_i p_i$
3. melakukan update $r_{i+1} = r_i - \lambda_i \mathbf{A}p_i$
4. menghitung nilai $\chi_i = \frac{(r_{i+1}, r_{i+1})}{(r_i, r_i)}$
5. melakukan update $p_{i+1} = r_{i+1} + \chi_i p_i$

Iterasi dilakukan sejumlah n iterasi atau sampai norma dari $\mathbf{b} - \mathbf{A}\alpha_i$ bernilai cukup kecil.

BAB V PENUTUP

Pada bab ini, diberikan kesimpulan yang diperoleh dari tugas akhir ini serta saran untuk penelitian selanjutnya.

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan analisis dan pembahasan pada bab sebelumnya, dapat disimpulkan bahwa metode elemen hingga dan gradien konjugasi dapat dikombinasikan untuk menyelesaikan forward problem dari pengukuran resistivitas. Hasil yang diperoleh menyatakan bahwa persamaan forward problem dapat dituliskan dalam $\mathbf{A}\alpha = \mathbf{b}$ menggunakan metode elemen hingga. Demikian juga nilai α pada persamaan $\mathbf{A}\alpha = \mathbf{b}$ diperoleh menggunakan metode gradien konjugasi.

5.2 Saran

Tugas Akhir memiliki beberapa kekurangan diantaranya belum dilakukannya simulasi dan belum adanya penyelesaian invers problem. Untuk penelitian selanjutnya, beberapa hal yang bisa dilakukan antara lain:

1. Melakukan simulasi dengan menggunakan data riil.
2. Mengubah metode dalam menyelesaikan forward problem.
3. Mengaplikasikan metode pada Tugas Akhir ini pada problem yang serupa.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Dey, A., dan Morison, H.F. 1977. **Resistivity Modeling for Arbitrarily Shaped Three-dimensional Structures**. Berkeley: Lawrence Berkeley National Laboratory.
- [2] Grotsch, C.W. 1993. **Inverse Problems in the Mathematical Sciences**. Wiesbaden: Springer.
- [3] Xiaoping, W. 2003. **A 3-D finite-element algorithm for DC resistivity modelling using the shifted incomplete Cholesky conjugate gradient method**. Geophysical Journal International.
- [4] Saad, Yousef. 2003. **Iterative Methods for Sparse Linear Systems**. Society for Industrial and Applied Mathematics.
- [5] Lowrie, W. 2007. **Fundamentals of Geophysics**. Second Edition. Cambridge: University Press.
- [6] Atkinson, K., dan Han, W. 2009. **Theoretical Numerical Analysis: A Functional Analysis Framework**. Third Edition. New York: Springer.
- [7] Ciarlet, P.G. 2002. **The Finite Element Method for Elliptic Problems**. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics.

Biodata Penulis



Penulis memiliki nama lengkap Satria Stanza Pramayoga, lahir di Trenggalek, 29 Juli 1990. Terlahir sebagai anak pertama dari 3 bersaudara. Sejak usia dini penulis telah menempuh pendidikan formal dimulai dari TK Dharma Wanita 1 Suruh (1994-1996), SDN 1 Suruh (1996-2002), SMP Negeri 1 Trenggalek (2002-2005), dan SMA Negeri 1 Trenggalek (2005-2008). Setelah lulus dari SMA, penulis melanjutkan studi ke jenjang S1 di Jurusan Matematika ITS Surabaya NRP 1208 100 050. Selama menempuh pendidikan di ITS, penulis juga aktif berorganisasi di Himpunan Mahasiswa Matematika ITS dan lembaga dakwah jurusan Ibnu Muqhlah. Selain itu penulis juga aktif dalam berbagai kegiatan olimpiade matematika baik di lingkungan kampus, Jawa Timur, maupun Indonesia. Saat menulis Tugas Akhir ini, penulis berkecimpung dalam komunitas Tim Olimpiade Matematika Indonesia dengan salah satu produk unggulannya adalah Kontes Terbuka Olimpiade Matematika.

Adapun untuk informasi lebih lanjut mengenai Tugas Akhir ini dapat ditujukan ke penulis melalui email pramayogastanza@gmail.com